

Zadanie 1.

$$\begin{cases} x^2 + 2yz + 5x = 2 \\ y^2 + 2zx + 5y = 2 \\ z^2 + 2xy + 5z = 2 \end{cases}$$

Zauważmy, że układ równań jest symetryczny względem zmiennych x, y, z . Odejmijmy parami równania stronami:

$$\begin{cases} (x - y)(x + y - 2z + 5) = 0 \\ (y - z)(y + z - 2x + 5) = 0 \\ (z - x)(z + x - 2y + 5) = 0 \end{cases}$$

Przypuśćmy, że zachodzi

$$\begin{cases} (x + y - 2z + 5) = 0 \\ (y + z - 2x + 5) = 0 \\ (z + x - 2y + 5) = 0 \end{cases}$$

Dodając równania stronami otrzymamy $15 = 0$, czyli sprzeczność. Zatem przynajmniej dwie spośród liczb x, y, z są równe. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $y = z$. Stąd:

$$(x - y)(x - y + 5) = 0$$

Czyli $y = x$ lub $y = x + 5$. W pierwszym przypadku nasze początkowe równanie przyjmuje postać

$$3x^2 + 5x = 2$$

A zatem $x = -2$ lub $x = \frac{1}{3}$. W drugim przypadku

$$3x^2 + 25x + 48 = 0$$

Czyli $x = -\frac{16}{3}$ lub $x = -3$. Biorąc pod uwagę symetrię układu, pozostaje sprawdzić, że układ spełniają trójki liczb:

$$(x, y, z) \in \left\{ (-2, -2, -2), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{16}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{1}{3}\right), \right. \\ \left. \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}\right), (-3, 2, 2), (2, -3, 2), (2, 2, -3) \right\}$$

Zadanie 2. Przypuśćmy, że $k \geq m$. Wówczas

$$k^2 < k^2 + 4m \leq k^2 + 4k < k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2$$

Stąd $k^2 + 4m = (k + 1)^2$, a zatem różnica dwóch kolejnych kwadratów jest liczbą parzystą, co prowadzi do sprzeczności. Musi zatem być $k < m$. Wówczas

$$m^2 < m^2 + 5k < m^2 + 6m + 9 = (m + 3)^2$$

Możliwe są więc dwa przypadki:

1) $m^2 + 5k = (m + 1)^2$. Wówczas $4m = 10k - 2$. Stąd mamy

$$k^2 < k^2 + 4m = k^2 + 10k - 2 < (k + 5)^2$$

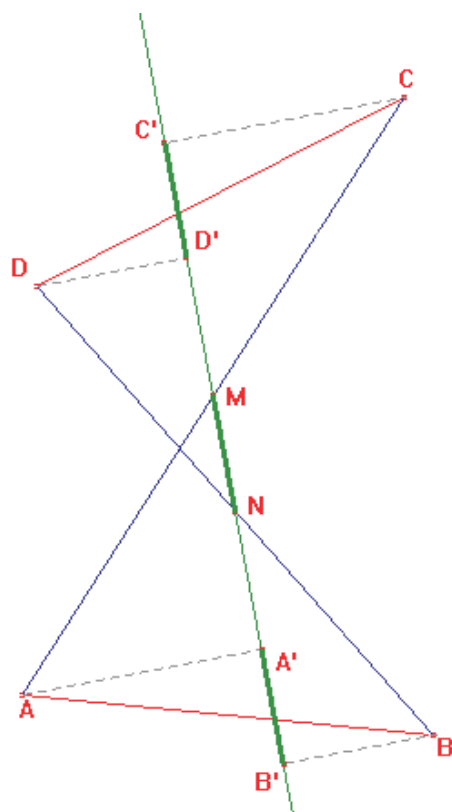
Jako, że dwa kolejne kwadraty nie różnią się o liczbę parzystą, $k^2 + 4m = (k + 2)^2$ lub $k^2 + 4m = (k + 4)^2$. W pierwszym przypadku $k = 1$, $m = 2$, a w drugim $k = 9$, $m = 22$.

2) $m^2 + 5k = (m + 2)^2$. Wówczas $4m = 5k - 4$. Stąd mamy

$$k^2 < k^2 + 4m = k^2 + 5k - 4 < (k + 3)^2$$

Jako, że dwa kolejne kwadraty nie różnią się o liczbę parzystą, $k^2 + 4m = (k + 2)^2$, a zatem $k = 8$, $m = 9$.

Odp. Liczby $k^2 + 4m$ i $m^2 + 5k$ są kwadratami dla $(k, m) \in \{(1, 2), (8, 9), (9, 22)\}$.



Zadanie 3. Oznaczmy przez A', B', C', D' rzuty prostokątne punktów A, B, C, D na prostą MN . $DN = BN$, więc $\triangle NDD' \equiv \triangle NBB'$, a zatem $DD' = BB'$. Analogicznie $\triangle MCC' \equiv \triangle MAA'$, więc $CC' = AA'$. Trapez prostokątny (krzyżowy lub nie) jest jednoznacznie wyznaczony przez długości obu podstaw i ramienia niebędącego wysokością, tak samo jak jednoznacznie wyznaczony jest trójkąt prostokątny o danej przeciwprostokątnej i jednej z przysprostokątnych (w naszym przypadku sumie lub różnicy podstaw trapezu). Tak więc czworokąty $CC'D'D$ i $AA'B'B$ są przystające, a zatem $C'D' = A'B'$. Przesuńmy odcinek $B'D'$ o wektor $\overrightarrow{B'A'}$. Jego środek (punkt N) przejdzie na środek odcinka $A'C'$, czyli punkt M . Stąd wniosek, że

$$NM = D'C' = B'A'$$

Zadanie 4. Przez *dobry* ciąg rozumiemy taki ciąg $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, gdzie $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, że w każdej trójce kolejnych wyrazów są co najmniej dwa wyrazy równe. Niech f_n będzie szukaną liczbą *dobrych* ciągów o długości n . Oznaczmy przez a_n liczbę *dobrych* ciągów o długości n , takich że $c_{n-1} = c_n$, a przez b_n liczbę *dobrych* ciągów o długości n , takich że $c_{n-1} \neq c_n$. Wówczas dla każdego n zachodzi:

$$f_n = a_n + b_n \quad (1)$$

Gdy *dobry* ciąg o długości n kończy się dwoma równymi wyrazami, to dopisując na końcu dowolną z 10 cyfr otrzymamy *dobry* ciąg o długości $n + 1$. Jeżeli natomiast ciąg o długości n kończy się dwoma różnymi wyrazami c_n i c_{n-1} , to aby otrzymać *dobry* ciąg o długości $n + 1$ musimy na koniec ciągu dopisać c_{n-1} lub c_n . W ten sposób otrzymamy wszystkie możliwe *dobre* ciągi o długości $n + 1$, gdyż w każdym takim ciągu wyrazy c_{n-1} i c_n są równe albo różne. Stąd wniosek, że:

$$f_{n+1} = 10a_n + 2b_n \quad (2)$$

Pozostaje jeszcze zauważyć iż dopisując na koniec n -elementowych *dobrych* ciągów jeszcze raz ich ostatni wyraz otrzymamy wszystkie możliwe *dobre* ciągi o dwóch ostatnich wyrazach równych. A zatem:

$$a_{n+1} = f_n \quad (3)$$

Łącząc (1), (2) i (3) otrzymujemy:

$$f_{n+1} = 10a_n + 2(f_n - a_n) = 8a_n + 2f_n = 8f_{n-1} + 2f_n \quad (4)$$

Policzmy f_3 i f_4 . *Dobrych* ciągów trójwyrazowych o równych dwóch ostatnich wyrazach jest 100 (wybieramy na 10 sposobów wyraz ostatni, a potem na 10 sposobów wyraz pierwszy), a o różnych dwóch ostatnich wyrazach 180 (wybieramy na 10 sposobów ostatni wyraz, potem na 9 sposobów drugi różny od trzeciego, a na końcu jeden z dwóch jako pierwszy wyraz). Stąd $f_3 = 280$. Teraz $f_4 = 10a_3 + 2b_3 = 10 \cdot 100 + 2 \cdot 180 = 1360$. Udowodnię przez indukcję, że wzór

$$f_n = 5(4^n + (-2)^n) \quad (5)$$

spełnia równanie rekurencyjne (4). Dla $n = 5$:

$$f_5 = 5(4^5 + (-2)^5) = 4960 = 8f_3 + 2f_4$$

Założmy, że wzór (5) jest poprawny dla wszystkich $5 \leq n \leq k$. Wówczas

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= 8f_{k-1} + 2f_k = 8 \cdot 5(4^{k-1} + (-2)^{k-1}) + 2 \cdot 5(4^k + (-2)^k) \\ &= 5(8 \cdot 4^{k-1} + 2 \cdot 4^k + 8 \cdot (-2)^{k-1} + 2 \cdot (-2)^k) \\ &= 5(2 \cdot 4^k + 2 \cdot 4^k + 2 \cdot (-2)^{k+1} - (-2)^{k+1}) = 5(4^{k+1} + (-2)^{k+1}), \end{aligned}$$

a więc wzór (5) jest prawdziwy dla $n = k + 1$, co kończy dowód indukcyjny.