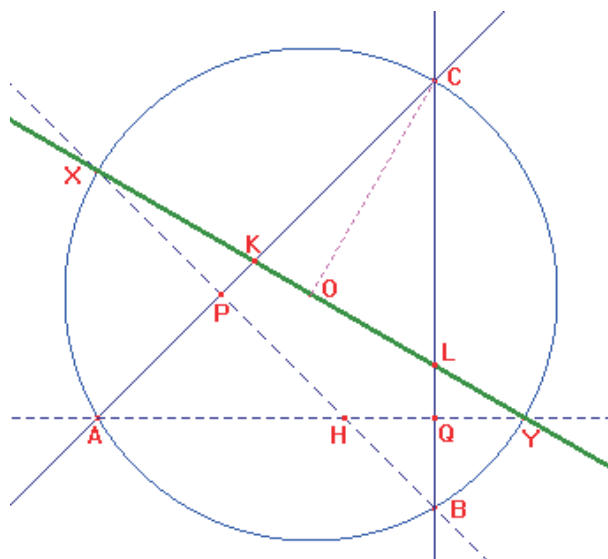




Zadanie 5. Oznaczmy przez P i Q spodki wysokości z punktów B i A . Znanym jest fakt, że punkty X i Y , odbicia symetryczne ortocentrum H względem boków AC i BC leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC (dowód dla X opiera się na równości kątów XCP , XBA i HCA). $\angle XBC = 45^\circ$, więc $\angle XOC$ jest prosty. Analogicznie $\angle YOC$ jest prosty, więc punkty X, K, O, L, Y są współliniowe. Odcinki KH i KX są symetryczne względem AC , natomiast odcinki LY i LH są symetryczne względem BC . Stąd:

$$OK + KH = OK + KX = OX = OY = OL + LY = OL + LH$$

Zadanie 6. Podstawmy $x = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$, $z = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$. Na mocy nierówności ciągów jedno-monotonicznych

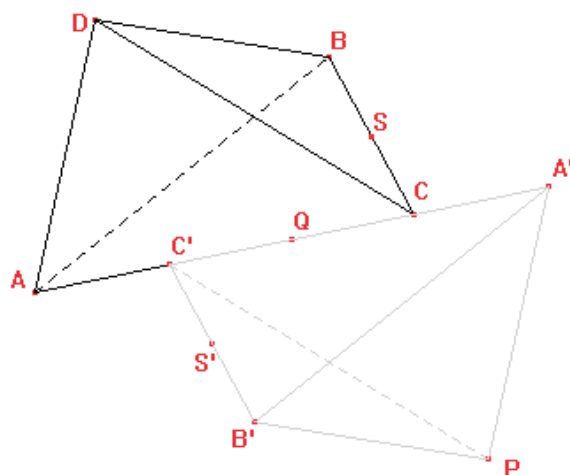
$$x^2y + y^2z + z^2x \leq x^3 + y^3 + z^3 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Na mocy Nierówności Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} a + ab + abc &\geq 3\sqrt[3]{a^3b^2c} = 3\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{a^2b} \\ \frac{1}{a + ab + abc} &\leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{a^2b}} = \frac{x^2y}{3\sqrt[3]{abc}} \end{aligned}$$

Sumując trzy analogiczne nierówności otrzymujemy:

$$\frac{1}{a + ab + abc} + \frac{1}{b + bc + bca} + \frac{1}{c + ca + cab} \leq \frac{x^2y + y^2z + z^2x}{3\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$



Zadanie 7. Punkt Q leży na dwusiecznej kąta ABC , więc $QR = QS$, gdzie S jest środkiem odcinka BC . Odbijmy czworościan symetrycznie względem punktu Q . Czworokąt $SCS'C'$ jest równoległobokiem, więc również czworokąt $BSS'C'$ jest równoległobokiem. Stąd

$$BC' = SS' = 2QS = 2QR$$

$CD = C'P$, więc trójkąt $BC'P$ zbudowany jest z odcinków o długościach BP , CD oraz $2QR$.

Zadanie 8.

Lemat $Z_p = \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$ tworzy ciało. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie modulo p jest oczywiście dobrze określone. Pozostaje więc udowodnić jednoznaczność dzielenia – dla dowolnych liczb $a, b \neq 0$ istnieje dokładnie jedna liczba q , taka że $bq \equiv a \pmod{p}$.

Dowód Przypuśćmy, że dla pewnych $q \neq r$, a i b ze zbioru $Z_p - \{0\}$ zachodzi $qb \equiv rb \equiv a \pmod{p}$. Wówczas $b(q-r) \equiv 0 \pmod{p}$, czyli $p|(q-r)$. Jednak $q-r < p$, więc $q=r$.

Dla każdych $q_1 \not\equiv q_2 \pmod{p}$ zachodzi $bq_1 \not\equiv bq_2$, więc dla dowolnego $b \in Z_p$ liczby $b, 2b, \dots, (p-1)b$ dają różne reszty z dzielenia przez p . Różnych reszt jest $p-1$, więc dla każdej reszty a istnieje liczba q_i , taka że $bq_i \equiv a \pmod{p}$, co kończy dowód lematu.

Udowodnię, że ciąg $x_1 = 1$, $x_n = \frac{n}{n-1}$ dla $n > 1$ spełnia warunki zadania. Symbol dzielenia oznacza tu oczywiście dzielenie w ciele Z_p , które, jak udowodniliśmy, jest jednoznaczne. Wówczas ciąg $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2 \dots x_{p-1}$ to ciąg $(1, 2, 3, \dots, p-1)$, więc oczywiście jego wyrazy dają różne reszty z dzielenia przez p . Przypuśćmy, że $x_a = x_b$ dla pewnych $a \neq b$. Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{a}{a-1} &= \frac{b}{b-1} \\ ab-a &= ab-b \\ a &= b, \end{aligned}$$

a zatem wyrazy ciągu x_n są parami różne, więc ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ jest permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, p-1\}$.