

**Zadanie 9.** Przypuśćmy, że istnieją różne liczby naturalne  $m, n$ , dla których  $F(m) = F(n)$ . Niech  $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$ ,  $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots$ ,  $F(m) = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots$  i  $F(n) = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \dots$ , gdzie  $p_1, p_2, \dots$  są kolejnymi liczbami pierwszymi. Wykładnik  $x_i$  jest sumą potęg przy  $p_i$  wszystkich dzielników liczby  $m$ . Dla każdego  $j \in [0, \alpha_1]$  dzielników liczby  $m$  o współczynniku  $j$  przy  $p_i$  jest

$$\prod_{k \neq i} (\alpha_k + 1),$$

zatem

$$x_i = \sum_{j=0}^{\alpha_i} \left( j \prod_{k \neq i} (\alpha_k + 1) \right) = \left( \prod_{k \neq i} (\alpha_k + 1) \right) \sum_{j=0}^{\alpha_i} j = \left( \prod_{k \neq i} (\alpha_k + 1) \right) \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)}{2} = \frac{\alpha_i}{2} \prod_k (\alpha_k + 1).$$

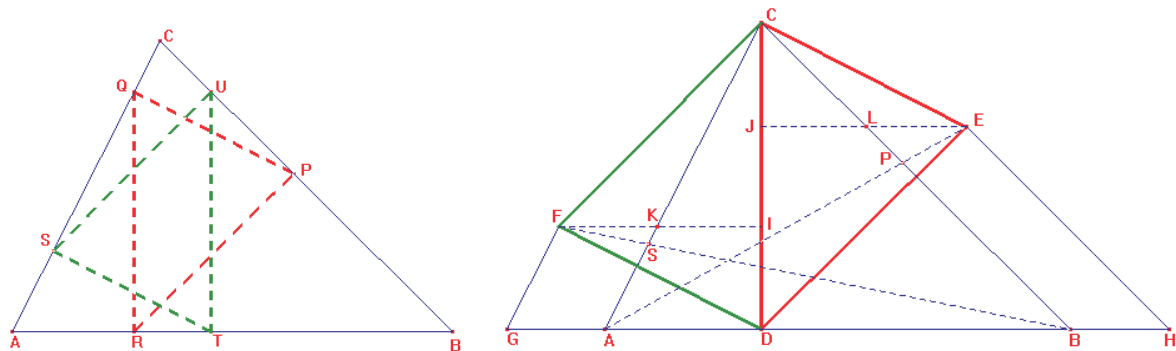
Analogicznie

$$y_i = \frac{\beta_i}{2} \prod_k (\beta_k + 1).$$

Jednak  $x_i = y_i$ , więc

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\prod_k (\beta_k + 1)}{\prod_k (\alpha_k + 1)} = \lambda,$$

gdzie  $\lambda$  jest pewną stałą niezależną od  $i$ . Zatem  $\forall_i \alpha_i = \lambda \beta_i$ . Gdy  $\lambda > 1$   $F(m) > F(n)$ , gdy  $\lambda < 1$   $F(m) < F(n)$ , zatem  $\lambda = 1$ , więc  $m = n$ . Stąd wniosek, że nie istnieją różne liczby  $m, n$  spełniające warunki zadania.



**Zadanie 10.**  $\angle QRP = 90^\circ - \angle BRP = \angle RBP = \angle ABC$ . Analogicznie  $\angle RQP = \angle BAC$ ,  $\angle CAB = \angle STU$  i  $\angle ABC = \angle TUS$ . Zatem  $\triangle CAB \sim \triangle PQR \sim \triangle STU$ .

Przez  $D$  oznaczmy spodek wysokości z punktu  $C$ . Niech  $E$  i  $F$  będą takimi punktami, że  $\triangle CDE \sim \triangle DCF \sim \triangle ABC$ .  $CD \perp AB$ , więc  $DE \perp BC$  i  $DF \perp AC$ . Zatem prosta  $BC$  zawiera wysokość trójkąta  $DEC$ , a prosta  $AC$  zawiera wysokość trójkąta  $DFC$ . Oznaczmy przez  $K$  i  $L$  ortocentra trójkątów  $DFC$  i  $DEC$ . Niech  $G$  będzie punktem przecięcia z prostą  $AB$  prostej równoległej do  $AC$  przechodzącej przez  $F$ , a  $H$  punktem przecięcia z prostą  $AB$  prostej równoległej do  $BC$  przechodzącej przez  $E$ . Trójkąty  $CDE$  i  $DCF$  są przystające, więc  $FK = LE$ .  $LEHB$  i  $KAGF$  są równoległobokami, a zatem  $GA = BH$ . Trójkąt  $PQR$  jest obrazem trójkąta  $ECD$  w jednokładności o środku  $A$  i skali  $\frac{AP}{AE}$ . Trójkąt  $STU$  jest obrazem trójkąta  $FDC$  w jednokładności o środku  $B$  i skali  $\frac{BS}{BF}$ . Jednak

$$\frac{AP}{AE} = \frac{AB}{AH} = \frac{BA}{BG} = \frac{BS}{BF},$$

więc  $\triangle PQR \equiv \triangle STU$ .

**Zadanie 11.** Rozpatrzmy dwa przypadki:

1)  $n = 1$ . Z warunków zadania otrzymujemy nierówność  $x_4 > x_1 > x_5 > x_2$ . Oznacza to, że gdy wybierzemy liczbę  $x_3$  spośród  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  (co możemy wykonać na 5 sposobów) to istnieje tylko jedna permutacja pozostałych 4 wyrazów spełniająca tę nierówność. Zatem, dla  $n = 1$  istnieje  $5 = \binom{6n-1}{3n-2}$  permutacji ciągu  $(1, 2, 3, 4, 5)$  spełniających warunki zadania.

2)  $n > 1$ . Stwórzmy graf skierowany o wierzchołkach  $1, 2, \dots, 6n - 1$ . Krawędź  $(i, j)$  poprowadzimy w nim wtedy i tylko wtedy, gdy warunki zadania bezpośrednio wymuszają nierówność  $x_i > x_j$  (więc gdy  $i - j = 2n + 1$  lub  $j - i = 4n$ ). Ponadto nadajmy każdej krawędzi wagę równą modułowi różnicy numerów wierzchołków, które łączy. Wierzchołki  $2n, 2n + 1, 4n - 1, 4n$  zasługują na uwagę, ponieważ każdy z nich jest incydentny z tylko jedną krawędzią i ma ona wagę  $2n + 1$ . Z wierzchołków  $4n - 1$  i  $4n$  krawędź wychodzi, a do wierzchołków  $2n$  i  $2n + 1$  krawędź wchodzi. Pozostałe wierzchołki podzielmy na 3 zbiory:  $A = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ ,  $B = \{2n + 2, 2n + 3, \dots, 4n - 2\}$  i  $C = \{4n + 1, 4n + 2, \dots, 6n - 1\}$ . Z każdego wierzchołka ze zbioru  $A$  wychodzi jedna krawędź o wadze  $4n$ , a wchodzi doń jedna krawędź o wadze  $2n + 1$ . Z każdego wierzchołka ze zbioru  $B$  wychodzi jedna krawędź o wadze  $2n + 1$ , a wchodzi doń jedna krawędź o wadze  $2n + 1$ . Z każdego wierzchołka ze zbioru  $C$  wychodzi jedna krawędź o wadze  $2n + 1$ , a wchodzi doń jedna krawędź o wadze  $4n$ . Wynika stąd, że w grafie istnieje ścieżka z  $4n - 1$  do jednego wierzchołka spośród  $\{2n, 2n + 1\}$  i istnieje ścieżka z  $4n$  do drugiego wierzchołka spośród  $\{2n, 2n + 1\}$ .

Przyjrzyjmy się jak wyglądają te ścieżki:

$$4n - 1, 2n - 2, 6n - 2, 4n - 3, 2n - 4, \dots, 4n - (2k - 1), 2n - 2k, 6n - 2k, \dots, 2n + 1$$

$$4n, 2n - 1, 6n - 1, 4n - 2, 2n - 3, \dots, 4n - 2k, 2n - (2k + 1), 6n - (2k + 1), \dots, 2n$$

Pierwsza z nich przebiega kolejno po wszystkich wierzchołkach o numerach parzystych ze zbiorów  $A$  i  $C$  oraz po wszystkich wierzchołkach o numerach nieparzystych ze zbioru  $B$ . Dlatego skończy się ona w wierzchołku o numerze  $2n + 1$ . Z kolei druga z nich przebiega kolejno po wszystkich wierzchołkach o numerach nieparzystych ze zbiorów  $A$  i  $C$  oraz po wszystkich wierzchołkach o numerach parzystych ze zbioru  $B$ . Dlatego skończy się ona w wierzchołku o numerze  $2n$ . Ścieżki te przechodzą razem przez wszystkie wierzchołki naszego grafu, przez każdy dokładnie jeden raz. Pierwsza z nich ma długość  $3n - 2$ , a druga  $3n + 1$ . Zachodzą zatem dwie nierówności:

$$x_{4n-1} > x_{2n-2} > x_{6n-2} > \dots > x_{2n+1}$$

$$x_{4n} > x_{2n-1} > x_{6n-1} > \dots > x_{2n}$$

Występują w niej wszystkie liczby  $x_1, x_2, \dots, x_{6n-1}$ , każda dokładnie raz. Zatem wybierając ze zbioru  $\{x_1, x_2, \dots, x_{6n-1}\}$   $3n - 2$  tych które występują w pierwszej nierówności, otrzymujemy w sposób jednoznaczny ich uporządkowanie, jak również uporządkowanie pozostałych wyrazów (dzięki drugiej nierówności). Każdemu wyborowi tych  $3n - 2$  wyrazów odpowiada inna permutacja ciągu  $x_i$ , więc wszystkich permutacji ciągu  $x_i$  spełniających warunki zadania jest  $\binom{6n-1}{3n-2}$ .

**Zadanie 12.** Dowód przez indukcję względem  $n$ , stopnia wielomianu  $W(x)$  z krokiem 2. Sprawdźmy bazę indukcji dla  $n = 0$  i  $n = 1$ . Dowód, że z prawdziwości tezy dla  $n$  wynika prawdziwość tezy dla  $n + 2$  zakończy zadanie.

1) Dla  $n = 0$   $W(x) = c$ , gdzie  $c$  jest pewną dodatnią stałą.  $P(x) = \sqrt{c}$  i  $m = 0$  spełniają tezę.

Dla  $n = 1$   $W(x) = cx + d$ , gdzie  $c$  i  $d$  są pewnymi stałymi. Na przedziale  $(a, b)$   $W(x) > 0$ , zatem istnieje wklęsła parabola przecinająca oś odciętych w punktach  $a$  i  $b$  styczna do prostej  $W(x)$ . Parabola ta ma równanie  $G(x) = \lambda(x - a)(b - x)$ , przy czym  $\lambda > 0$ . Funkcja  $S(x) = W(x) - G(x)$  jest wypukłą funkcją kwadratową o podwójnym pierwiastku na przedziale  $(a, b)$  (w punkcie styczności wykresów funkcji  $W(x)$  i  $G(x)$ ). Zatem  $S(x)$  jest kwadratem pewnego wielomianu liniowego  $P(x)$ . Tak więc

$$W(x) = S(x) + G(x) = (P(x))^2 + (x - a)(b - x) (\sqrt{\lambda})^2.$$

2) **Założenie indukcyjne:** Wszystkie wielomiany dodatnie na przedziale  $(a, b)$  o stopniu nie większym niż  $n$  dają się zapisać jako  $(P(x))^2 + (x - a)(b - x) \sum_{i=1}^m (Q_i(x))^2$ , gdzie  $P(x)$  i  $Q_1(x), Q_2(x), \dots$  są pewnymi wielomianami.

**Teza indukcyjna:** Wszystkie wielomiany dodatnie na przedziale  $(a, b)$  o stopniu nie większym niż  $n + 2$  dają się zapisać jako  $(P(x))^2 + (x - a)(b - x) \sum_{i=1}^m (Q_i(x))^2$ , gdzie  $P(x)$  i  $Q_1(x), Q_2(x), \dots$  są pewnymi wielomianami.

**Dowód kroku indukcyjnego:** Rozpatrzmy dowolny wielomian stopnia  $n + 2$  dodatni na przedziale  $(a, b)$ . Niech  $G(x) = \lambda(x - a)(b - x)$ , przy czym  $\lambda > 0$ . Wykres  $G(x)$  jest wklęsłą parabolą przecinającą oś odciętych w punktach  $a$  i  $b$ . Dla dostatecznie małych  $\lambda$  na przedziale  $(a, b)$  wykres  $G(x)$  leży poniżej wykresu  $W(x)$ . Dla dostatecznie dużych  $\lambda$  wykres  $G(x)$  przecina wykres  $W(x)$  na przedziale  $(a, b)$ .  $\lambda$  możemy zmieniać w sposób ciągły, więc istnieje takie  $\lambda$ , że wykresy  $G(x)$  i  $W(x)$  są styczne, ale nie przecinają się na przedziale  $(a, b)$ . Wówczas na przedziale  $(a, b)$   $W(x) \geq G(x)$ , zatem  $S(x) = W(x) - G(x) \geq 0$  i wszystkie pierwiastki  $S(x)$  na przedziale  $(a, b)$  mają parzystą krotność. Możemy więc przedstawić  $S(x)$  jako  $(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \dots (x - x_k)^2 T(x)$ , gdzie  $T(x) > 0$  na przedziale  $(a, b)$ .  $T(x)$  jest wielomianem stopnia nie większego niż  $n$ , więc na mocy założenia indukcyjnego istnieją takie wielomiany  $P(x)$  i  $Q_1(x), Q_2(x), \dots$ , że  $T(x) = (P(x))^2 + (x - a)(b - x) \sum_{i=1}^m (Q_i(x))^2$ . Zatem:

$$\begin{aligned} W(x) &= S(x) + G(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)^2 T(x) + \lambda(x - a)(b - x) \\ &= \prod_{i=1}^k (x - x_i)^2 \left( (P(x))^2 + (x - a)(b - x) \sum_{i=1}^m (Q_i(x))^2 \right) + \lambda(x - a)(b - x) \\ &= \left( \prod_{i=1}^k (x - x_i) P(x) \right)^2 + (x - a)(b - x) \left( \sum_{i=1}^m (Q_i(x))^2 + (\sqrt{\lambda})^2 \right), \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.